Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode

zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Detlef Cauer.

Göttingen 1914.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der mathem.-naturw. Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Dezember 1913.

Referent: Herr Professor Dr. Edmund Landau.

Meinem ersten Lehrer der Mathematik

Herrn Dr. Paul Serf

Professor am städt. Gymnasium und Realgymnasium
zu Düsseldorf

in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548110_0105

Einleitung.

Über die Anzahl $A_2(x)$ der Gitterpunkte im Kreise mit dem Radius $\sqrt{x}$ um den Nullpunkt, d. h. die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$u^2 + v^2 \leqq x,$$

hat Herr Sierpiński[1]) bewiesen, daß

$$A_2(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \tag{1}$$

ist[2]). Diesen Satz verallgemeinere ich in den beiden Hauptteilen der vorliegenden Arbeit nach zwei Richtungen.

Im ersten Teil (genauer in § 1—5) beweise ich einen analogen Satz für die Anzahl $A(x)$ der Gitterpunkte in der Kugel mit dem Radius $\sqrt{x}$ um den Nullpunkt, d. h. also die Anzahl der Lösungen von

$$u^2 + v^2 + w^2 \leqq x$$

in ganzen Zahlen. $A(x)$ kann also auch gedeutet werden als die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen $\leqq x$ in drei Quadrate. Über $A(x)$ ist durch Herrn Landau[3])

$$A(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right) \tag{2}$$

---

1) Sierpiński, *O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych* [Prace matematyczno-fizyczne, Bd. XVII, 1906, S. 77—118].

2) Mit $O(g(x))$ bezeichnet man eine Funktion $f(x)$, für die es zwei positive Zahlen A und B gibt, derart daß für $x > B$

$$|f(x)| < A\,g(x)$$

ist.

3) Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 687—771] S. 764. (Diese Arbeit wird im folgenden mit I zitiert werden.)

für jedes $\varepsilon > 0$ bekannt. Ich verschärfe dies zu

$$A(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right). \tag{3}$$

Aus diesem Ergebnis ziehe ich dann in § 6 zwei Folgerungen:

Erstens kann man mit (3), was mit (2) nicht geht, einen Satz von Herrn Marcel Riesz auf eine mit dem Problem zusammenhängende Dirichletsche Reihe anwenden[1]).

Zweitens leite ich aus (3) die Relation ab

$$\sum_{0 < u^2+v^2+w^2 \leqq x} \frac{1}{u^2+v^2+w^2} = 4\pi\sqrt{x} + c + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{4}$$

Über diese Summe hat Herr Sierpiński eine besondere Arbeit geschrieben, deren Hauptergebnis dann von Herrn Landau verschärft worden ist; und (4) ist wieder um ε im Exponenten des O-Gliedes besser als die Abschätzung von Herrn Landau[1]).

Im zweiten Teil (d. h. § 7—12) schätze ich für jedes $n \geqq 2$ die Anzahl $A_n(x)$ der Lösungen von

$$|u|^n + |v|^n \leqq x$$

ab, was für $n > 2$ ganz neu ist, während für $n = 2$ der Sierpińskische Satz (1) mit herauskommt. Ich erhalte nämlich

$$A_n(x) = J.x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{2}{n}\cdot\frac{n-1}{2n-1}}\right), \tag{5}$$

wo J eine nur von n abhängende Konstante ist. Trivial ist

$$A_n(x) = J.x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

wo das O-Glied gerade die Dimension des Randes des Gebietes hat. Diese Abschätzung ergibt sich aus dem bekannten, zuerst bei der Bestimmung der Klassenzahl quadratischer Formen benutzten geometrischen Hilfssatz. Sie ist auch mit $A = B = 1$, $\alpha = \beta = n$ in der Abschätzung der Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$Au^\alpha + Bv^\beta \leqq x \quad (A > 0,\ B > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$$

bei Herrn Bachmann[2]) enthalten, während sich bei Cesàro[3]) nur das Hauptglied findet.

---

1) Man vergleiche § 6, wo auch die in Betracht kommende Literatur genau zitiert wird.

2) Bachmann, *Die analytische Zahlentheorie*, Leipzig (1894), S. 447—449.

3) Cesàro, *Sur diverses questions d'arithmétique. Premier mémoire.* [Mé-

Übrigens ist $A_n(x)$ für gerades n die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande der Kurve $u^n + v^n = x$; für ungerades n dagegen muß der Rand des entsprechenden Gebietes aus dem im ersten Quadranten liegenden Stück von $u^n + v^n = x$ und seinen symmetrischen Wiederholungen in Bezug auf die Koordinatenaxen zusammengesetzt werden. Durch $|u|^n + |v|^n = x$ wird aber in jedem Falle der Rand dargestellt. — Bezeichnet man mit $B_n(x)$ die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen $\leqq x$ in zwei $n$te Potenzen nicht negativer Zahlen, so ist

$$B_n(x) = \frac{1}{4} A_n(x) + \left[x^{\frac{1}{n}}\right] + \frac{3}{4},$$

woraus man in Verbindung mit (5) auch für $B_n(x)$ eine asymptotische Darstellung erhalten kann. Für gerades n kann man natürlich $A_n(x)$ selbst als Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen $\leqq x$ in zwei $n$te Potenzen beliebiger ganzer Zahlen auffassen.

Die Methode, mit der ich die Beweise von (3) und (5) führe, ist die sogenannte Pfeiffersche, welche Herr Landau in zwei kürzlich erschienenen Arbeiten[1]) mit Benutzung von Ideen aus einem Programm[2]) des Herrn E. Pfeiffer vom Jahre 1886 (in dem dieser ähnliche Abschätzungen zu beweisen suchte) ausgearbeitet und für die analytische Zahlentheorie nutzbar gemacht hat.

Im ersten Teil wird diese Methode zum erstenmal auf ein räumliches Problem angewendet[3]). Die Hilfssätze 4—6, 8, 9 sind dementsprechende Übertragungen der Landauschen, während die Hilfssätze 1—3, ebenso wie 4′—6′, 8′, 9′ im zweiten Teil, mit den Beweisen fast wörtlich aus den Landauschen Arbeiten reproduziert sind. Der Leser braucht also weder die genannten Landauschen Arbeiten noch das Pfeiffersche Programm zu kennen,

---

moires de la Société royale des Sciences de Liège, Ser. 2, Bd. X, 1883, No. 6, 355 S.] S. 192—196.

1) Landau, *Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate* [Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 3, Bd. XX, 1913, S. 1—28] und *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXI, Abt. IIa, 1912, S. 2195—2332]. (Diese beiden Arbeiten werden im Folgenden mit II und III zitiert werden.)

2) Pfeiffer, *Über die Periodicität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten* [Jahresbericht der Pfeiffer'schen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena über das Schuljahr von Ostern 1885 bis Ostern 1886, S. 1—21].

3) Vgl. das Ende der Einleitung von III.

um die vorliegende Arbeit zu verstehen. Nur für die zu einigen der genannten Hilfssätze gehörige Literatur muß ich auf die Einleitung und die Fußnoten zum ersten Teil von III verweisen. Wortlaut und Beweis von Hilfssatz 7 sind in dem viel allgemeineren Hilfssatz 16 von I enthalten.

Die § 2—5 zeigen größere Abweichungen von dem Beweisgange bei Herrn Landau, welche teils durch das räumliche Problem an sich, teils durch spezielle Eigenschaften der Kugel bedingt sind, drittens aber zum Teil in einer prinzipiellen Vereinfachung der Methode bestehen. Diese Vereinfachung ließ sich auch bei der Behandlung von $A_n(x)$ anbringen und ist, abgesehen von der Ausdehnung auf beliebiges n, der Hauptunterschied meines zweiten Teiles von der Arbeit II, in der Herr Landau den Sierpińskischen Satz (1) beweist. Den einfachsten Beweis von (1) erhält man also jetzt aus meinen § 7—12, wenn man dort $n = 2$ setzt. Diese Spezialisierung für $n = 2$ ist an sich ganz einfach und kann durch Vergleich mit II noch erleichtert werden. Für die Leser von III teile ich im Anhang die entsprechende Vereinfachung des dortigen fünften Teiles mit, in dem Herr Landau das Ellipsenproblem behandelt. Den Teilerproblemen scheint der alte Weg adäquater zu sein.

Erster Teil.

Über die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in drei Quadrate.

Es bezeichne $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte der Kugel K mit dem Radius $\sqrt{x}$ um den Nullpunkt, d. h. die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$(K) \qquad u^2 + v^2 + w^2 \leqq x.$$

Das Ziel dieses ersten Teiles ist der Beweis der Relation

$$(3) \qquad A(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right).$$

§ 1. Approximation von $A(x)$ durch ein dreifaches Integral.

Es sei für jedes positive ganze m

$$(6) \qquad \varphi_m(u) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{m} \cos 2\nu\pi u.$$

Dann ist für ganzes g und beliebiges u

$$\varphi_m(g+u) = \varphi_m(g-u) = \varphi_m(u);$$

für nicht ganzes u ist bekanntlich

$$\varphi_m(u) = \frac{\sin(2m+1)\pi u}{\sin \pi u}.$$

Ferner hat man

$$(7) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du = \frac{1}{2}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi_m(u)\,du = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \varphi_m(u)\,du = 1.$$

Für jedes u ist

$$|\varphi_m(u)| \leqq 1 + 2m \leqq 3m; \tag{8}$$

für $0 < u \leqq \frac{1}{2}$ ist $\frac{\sin \pi u}{\pi u} \geqq \frac{2}{\pi}$, also

$$|\varphi_m(u)| \leqq \frac{1}{\sin \pi u} \leqq \frac{1}{2u}. \tag{9}$$

Hilfssatz 1: *Für* $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{2}$ *ist*

$$\left| \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| < \frac{1}{6m\vartheta};$$

für $\frac{1}{2} \leqq \vartheta < 1$ *ist*

$$\left| \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| < \frac{1}{6m(1-\vartheta)}.$$

Beweis: Die zweite Ungleichung ist eine Folge der ersten; für $\vartheta = \frac{1}{2}$ sind beide trivial; es sei also $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$. Im Intervall $\vartheta \leqq u \leqq \frac{1}{2}$ nimmt dann $\frac{1}{\sin \pi u}$ monoton ab; es ist also nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du = \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin \pi u} \sin (2m+1)\pi u\, du$$

$$= \frac{1}{\sin \pi \vartheta} \int_{\vartheta}^{\xi} \sin (2m+1)\pi u\, du = \frac{1}{\sin \pi \vartheta} \left\{ \frac{-\cos (2m+1)\pi u}{(2m+1)\pi} \right\}_{\vartheta}^{\xi}.$$

Hieraus folgt

$$\left| \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq \frac{1}{\sin \pi \vartheta} \cdot \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{2\vartheta} \cdot \frac{2}{2m\pi} < \frac{1}{6m\vartheta}.$$

Hilfssatz 2: *Für* $0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1$, $0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1$ *ist*

$$\left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 4.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\left| \int_{0}^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 2$$

bewiesen ist.

1) Es sei $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{3m}$; dann ist nach (8)

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq \frac{1}{3m} \cdot 3m = 1. \tag{10}$$

2) Es sei $\frac{1}{3m} \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{2}$; dann ist nach (7) und Hilfssatz 1

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du - \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{6m \frac{1}{3m}} = 1. \tag{11}$$

3) Es sei $\frac{1}{2} < \vartheta \leqq 1$; dann ist nach (7), (10) und (11)

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| = \left| \int_0^{1} \varphi_m(u)\, du - \int_{\vartheta}^{1} \varphi_m(u)\, du \right|$$

$$\leqq 1 + \left| \int_0^{1-\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 2.$$

Hilfssatz 3: *Es ist*

$$\int_0^1 |\varphi_m(u)|\, du \leqq 3 + \log m.$$

Beweis: Nach (8) und (9) ist

$$\int_0^1 |\varphi_m(u)|\, du = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(u)|\, du$$

$$\leqq 2 \int_0^{\frac{1}{2m}} 3m\, du + 2 \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2u} = 3 + \log m.$$

Hilfssatz 4: *Es seien λ, μ, ν beliebige ganze Zahlen; es sei $0 \leqq x_1 < x_2$. Die Kugelschale $x_1 \leqq u^2 + v^2 + w^2 \leqq x_2$ möge mit dem Würfel*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1,$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1,$$
$$\nu \leqq w \leqq \nu + 1$$

das Gebiet G gemeinsam haben. Dann ist

$$\left| \iiint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| \leqq 96.$$

Beweis: Ich zerlege den Würfel in 48 Pyramiden. Jede von diesen hat ihre Spitze im Mittelpunkt des Würfels, während ihre Grundfläche eins der Dreiecke ist, die entstehen, wenn ich jede Seitenfläche des Würfels durch die Mittellinien und Diagonalen in 8 rechtwinklige Dreiecke zerlege. G zerfällt dadurch in Teilgebiete; jede Parallele zu einer der Koordinatenaxen hat mit so einem Teilgebiet H höchstens einen Punkt oder eine einzige zusammenhängende Strecke gemeinsam. Da beim Beweise nur diese Eigenschaft benutzt wird, genügt es aus Symmetriegründen, für ein solches Teilgebiet H

$$\left| \iiint_H \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| \leqq 2$$

zu beweisen, und wegen der Periodizitätseigenschaften von $\varphi_m(u)$ kann außerdem für den Beweis angenommen werden, daß H folgende Gestalt hat

$$w_1 \leqq w \leqq w_2, \qquad \text{wo } 0 \leqq w_1 < w_2 \leqq \frac{1}{2} \text{ ist,}$$

$$F_1(w) \leqq v \leqq F_2(w), \qquad \text{wo } w \leqq F_1(w) \leqq F_2(w) \leqq \frac{1}{2} \text{ ist,}$$

$$f_1(v, w) \leqq u \leqq f_2(v, w), \qquad \text{wo } v \leqq f_1(v, w) \leqq f_2(v, w) \leqq \frac{1}{2} \text{ ist;}$$

hierin sind die Funktionen F_1, F_2, f_1, f_2 stetige Funktionen ihrer Argumente.

Nun ist

$$\iiint_H \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw$$

$$= \int_{w_1}^{w_2} \varphi_m(w)\, dw \int_{F_1(w)}^{F_2(w)} \varphi_m(v)\, dv \int_{f_1(v, w)}^{f_2(v, w)} \varphi_m(u)\, du.$$

Nach Hilfssatz 1 ist für $w_1 < w \leqq w_2$

$$\left| \int_{f_1(v, w)}^{f_2(v, w)} \varphi_m(u)\, du \right| \leq \left| \int_{f_1(v, w)}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| + \left| \int_{f_2(v, w)}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right|$$

$$< \frac{1}{6 m f_1(v, w)} + \frac{1}{6 m f_2(v, w)}$$

$$\leq \frac{1}{6 m v} + \frac{1}{6 m v} = \frac{1}{3 m v},$$

und nach Hilfssatz 2 für $w_1 \leqq w \leqq w_2$

$$\left| \int_{f_1(v,w)}^{f_2(v,w)} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 4;$$

also ist

$$\left| \iiint_H \right| \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(w)|\, dw \int_w^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(v)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{3mv}, 4\right) dv.$$

Nun ist nach (8) und (9)

$$\int_w^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(v)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{3mv}, 4\right) dv \leqq \int_0^{\frac{1}{6m}} 3m \cdot 4\, dv + \int_{\frac{1}{6m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2v} \cdot \frac{dv}{3mv}$$

$$< 12m \cdot \frac{1}{6m} + \frac{1}{6m} \int_{\frac{1}{6m}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} = 2 + \frac{1}{6m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{6m}} = 3,$$

und weiter ganz analog

$$\left| \iiint_H \right| \leqq \int_0^{\frac{1}{12m}} 3m \cdot 3\, dw + \int_{\frac{1}{12m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2w}\, dw \int_w^{\infty} \frac{1}{2v} \cdot \frac{1}{3mv}\, dv$$

$$= \frac{9m}{12m} + \frac{1}{12m} \int_{\frac{1}{12m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{w}\, dw \int_w^{\infty} \frac{dv}{v^2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{12m} \int_{\frac{1}{12m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{w}\, dw < 1 + \frac{1}{12m} \int_{\frac{1}{12m}}^{\infty} \frac{dw}{w^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{12m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{12m}} = 2.$$

Also ist

$$\left| \iiint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| \leqq 48 \cdot 2 = 96.$$

Hilfssatz 5: *Es seien λ, μ, ν ganze Zahlen, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. In dem Würfel*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1,$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1,$$
$$\nu \leqq w \leqq \nu + 1$$

liege ein Gebiet G von der Beschaffenheit, daß

$$\iiint_G du\,dv\,dw$$

existiert; G habe ferner eine der folgenden drei Gestalten

I) $f_1(v,w) \leqq u \leqq f_2(v,w)$, *wo* $\lambda+\varepsilon \leqq f_1(v,w) \leqq f_2(v,w) \leqq \lambda+1-\varepsilon$ *ist,*

II) $g_1(u,w) \leqq v \leqq g_2(u,w)$, *wo* $\mu+\varepsilon \leqq g_1(u,w) \leqq g_2(u,w) \leqq \mu+1-\varepsilon$ *ist,*

III) $h_1(u,v) \leqq w \leqq h_2(u,v)$, *wo* $\nu+\varepsilon \leqq h_1(u,v) \leqq h_2(u,v) \leqq \nu+1-\varepsilon$ *ist;*

die Funktionen f_1, f_2 seien in dem ganzen in Betracht kommenden Quadrat der v-w-Ebene definiert (sodaß in den Punkten, über denen kein Punkt von G liegt, $f_1 = f_2$ ist); analog g_1, g_2; h_1, h_2. Dann ist[1])

$$\left| \iiint_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw \right| \leqq \frac{(3+\log m)^2}{3\,m\,\varepsilon}.$$

Beweis: Natürlich braucht nur eine der drei Formen von G betrachtet zu werden, etwa I. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\left| \int_{f_1(v,w)}^{f_2(v,w)} \varphi_m(u)\,du \right| \leqq \left| \int_{f_1(v,w)-\lambda}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du \right| + \left| \int_{f_2(v,w)-\lambda}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du \right|$$

$$< \frac{1}{6\,m\,\varepsilon} + \frac{1}{6\,m\,\varepsilon} = \frac{1}{3\,m\,\varepsilon}. \tag{12}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist

$$\iiint_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,dv\,dw \int_{f_1(v,w)}^{f_2(v,w)} \varphi_m(u)\,du;$$

also folgt mit (12) und Hilfssatz 3

$$\left| \iiint_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw \right| \leqq \int_0^1 \int_0^1 |\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)|\,\frac{1}{3\,m\,\varepsilon}\,dv\,dw$$

$$= \frac{1}{3\,m\,\varepsilon} \cdot \int_0^1 |\varphi_m(v)|\,dv \cdot \int_0^1 |\varphi_m(w)|\,dw$$

$$< \frac{(3+\log m)^2}{3\,m\,\varepsilon}.$$

1) Die Funktion, die in G den Wert 1, sonst den Wert 0 hat, ist nach der Voraussetzung über den Würfel integrierbar, ebenso $\varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)$ als stetige Funktion, also auch das Produkt beider, dessen Integral das der Behauptung ist.

Hilfssatz 6: *Es sei $x > 0$, aber nicht ganz. Dann ist*

$$\lim_{m=\infty} \iiint_K \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw = A(x).$$

Beweis: Für jeden der Kugel K ganz angehörenden Gitterwürfel Q ist

$$\iiint_Q \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_0^1 \varphi_m(u)\,du \cdot \int_0^1 \varphi_m(v)\,dv \cdot \int_0^1 \varphi_m(w)\,dw = 1,$$

also

$$\lim_{m=\infty} \iiint_Q \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw = 1.$$

In jedem von der Kugel zerschnittenen Gitterwürfel ziehe ich in einem passend gewählten Abstand $\vartheta < \frac{1}{2}$ sechs Ebenen parallel zu den Seiten, sodaß jeder der acht kleinen Würfel in den Ecken entweder ganz im Innern oder ganz im Äußern von K liegt. Das in dem Würfel liegende Stück von K zerfällt dadurch in ein bis sieben Eckwürfel von der Kantenlänge ϑ und höchstens $27 - 8 = 19$ andere Gebiete. Für jeden jener Eckwürfel ist nach Hilfssatz 1

$$\iiint \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_0^\vartheta \varphi_m(u)\,du \int_0^\vartheta \varphi_m(v)\,dv \int_0^\vartheta \varphi_m(w)\,dw$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \int_\vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{8}.$$

Auf jedes der anderen Gebiete ist Hilfssatz 5 mit $\varepsilon = \vartheta$ anwendbar; das über diese Gebiete erstreckte dreifache Integral strebt also für $m = \infty$ gegen 0.

Allgemein gilt daher: Jeder Gitterwürfel trägt zum Limes des Integrals so vielmal $\frac{1}{8}$ bei, als Ecken von ihm im Innern von K liegen. Oder: Jeder Gitterpunkt in der Kugel liefert den Beitrag $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ zum Limes des Integrals; also ist

$$\lim_{m=\infty} \iiint_K \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w)\,du\,dv\,dw$$

vorhanden und hat genau den Wert $A(x)$.

Hilfssatz 7: *Es gibt eine absolute Konstante a_1, sodaß die Anzahl $U(n)$ der Lösungen von*

$$u^2 + v^2 + w^2 = n$$

für jedes $n \geqq 1$ der Ungleichung genügt

$$U(n) \leqq a_1 n^{\frac{3}{4}}.$$

Beweis: Die hier zu zählenden Gitterpunkte auf einer Kugel liegen, eventuell mit Ausnahme von zweien, auf höchstens $2n^{\frac{1}{2}}$ Kreisen mit ganzzahligen Radienquadraten $m \leqq n$. Bekanntlich ist für $m \geqq 1$ die Anzahl $\overline{U}(m)$ der Gitterpunkte auf einem Kreise vom Radius $\sqrt{m}$

$$\overline{U}(m) = 4 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

wo d alle ungeraden positiven Teiler von m durchläuft. Also gibt es ein $a_2 = a_2(\varepsilon)$, sodaß [1])

$$\overline{U}(m) \leqq 4T(m) \leqq a_2 m^{\varepsilon} \leqq a_2 n^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

und daher, wenn $\varepsilon = \frac{1}{4}$ gewählt wird,

$$U(n) \leqq 2 + 2n^{\frac{1}{2}} . a_2 n^{\frac{1}{4}} \leqq a_1 n^{\frac{3}{4}}$$

ist.

Hilfssatz 8: *Es gibt eine absolute Konstante a_3 und zu jedem ganzen $y \geqq 1$ ein $m_0 = m_0(y)$, sodaß für $m \geqq m_0$ und $y \leqq x_1 < x_2 \leqq y + 1$, wenn R das Gebiet $x_1 \leqq u^2 + v^2 + w^2 \leqq x_2$ bezeichnet,*

$$\left| \iiint_R \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| < a_3 y^{\frac{3}{4}}$$

ist.

Beweis: Das Gebiet $y \leqq u^2 + v^2 + w^2 \leqq y + 1$, von dem R ein Teil ist, heiße R'. Die Gitterwürfel, die mit R' mindestens einen Punkt gemeinsam haben, sind von zweierlei Art. Die einen haben eine Ecke auf der Oberfläche von R'; ihre Anzahl ist höchstens

$$8U(y) + 8U(y+1),$$

also nach Hilfssatz 7

$$\leqq 8a_1 y^{\frac{3}{4}} + 8a_1 (y+1)^{\frac{3}{4}} \leqq 8a_1 y^{\frac{3}{4}} + 8a_1 (2y)^{\frac{3}{4}} = a_4 y^{\frac{3}{4}}.$$

In jedem der übrigen Gitterwürfel mache ich dieselbe Konstruktion wie beim Beweise des Hilfssatzes 6, indem ich ϑ so wähle, daß

1) Mit $T(m)$ wird die Anzahl der positiven Teiler von m bezeichnet; der Satz $T(m) = O(m^{\varepsilon})$ des Herrn Runge ist z. B. in I, Hilfssatz 11 bewiesen.

keiner der kleinen Würfel in den Ecken einen Punkt mit R' gemeinsam hat. Durch die Hilfsebenen wird das in R' enthaltene gemeinsame Gebiet von R und dem Würfel in (höchstens 19) Teile zerlegt, auf deren jeden Hilfssatz 5 anwendbar ist, und zwar gleichmäßig für alle R, d. h. für alle x_1, x_2, mit $\varepsilon = \vartheta$. Das dreifache Integral über das gemeinsame Gebiet von R und dem Würfel strebt also für $m = \infty$ gleichmäßig in x_1, x_2 gegen 0.

Man erhält daher mit Benutzung von Hilfssatz 4 die für $m \geqq m_0 = m_0(y)$ gültige Abschätzung

$$\left| \int\int_R \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| < 96\, a_4\, y^{\frac{3}{4}} + 1 \leqq a_3\, y^{\frac{3}{4}}.$$

Hilfssatz 9: *Es gibt ein a_5 und zu jedem $z \geqq 1$ ein $M = M(z)$, sodaß für $m \geqq M$ und gleichmäßig für alle x der Strecke $z \leqq x \leqq 4z$*

$$\left| \int\int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw - A(x) \right| < a_5\, x^{\frac{3}{4}} \tag{13}$$

ist.

Beweis: Es genügt, die Existenz einer solchen absoluten Konstanten a_5 zu beweisen, daß, wenn y eine beliebige positive ganze Zahl ist, (13) für $m \geqq M(y)$ und für alle x der Strecke $y \leqq x < y + 1$ gilt.

Nach Hilfssatz 6 ist für $m \geqq m_1(y)$

$$\left| \int\int\int_{u^2+v^2+w^2 \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw - A\left(y + \frac{1}{2}\right) \right| < 1,$$

worin wegen $y \leqq x < y + 1$

$$A\left(y + \frac{1}{2}\right) = A(y) = A(x)$$

ist. Nach Hilfssatz 8 ist für $m \geqq m_0(y)$ gleichmäßig in x

$$\left| \int\int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw - \int\int\int_{u^2+v^2+w^2 \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, \varphi_m(r)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw \right| < a_3\, y^{\frac{3}{4}}.$$

Daher ist für $m \geqq \mathrm{Max}\,(m_0, m_1) = M(y)$

$$\left| \int\int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, \varphi_m(w)\, du\, dv\, dw - A(x) \right| < a_3\, y^{\frac{3}{4}} + 1 \leqq a_5\, y^{\frac{3}{4}} \leqq a_5\, x^{\frac{3}{4}}. \tag{13}$$

§ 2. Umformung des dreifachen Integrals.

Es ist identisch

$$\begin{aligned}\varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,\varphi_m(w) &= 1+(\varphi_m(u)-1)+(\varphi_m(v)-1)+(\varphi_m(w)-1)\\ &\quad+(\varphi_m(v)-1)(\varphi_m(w)-1)+(\varphi_m(w)-1)(\varphi_m(u)-1)\\ &\quad+(\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1)\\ &\quad+(\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1)(\varphi_m(w)-1).\end{aligned}$$

Die Ungleichung (13) des Hilfssatzes 9 geht also in folgende über

$$\begin{aligned}\Big| A(x)-\int\!\!\int_K\!\!\int du\,dv\,dw-3\int\!\!\int_K\!\!\int(\varphi_m(u)-1)\,du\,dv\,dw\\ -3\int\!\!\int_K\!\!\int(\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1)\,du\,dv\,dw\\ -\int\!\!\int_K\!\!\int(\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1)(\varphi_m(w)-1)\,du\,dv\,dw\Big| < a_5\,x^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

oder nach der Definition (6) von $\varphi_m(u)$

$$\begin{aligned}(14)\quad \Big| A(x)-\int\!\!\int_K\!\!\int du\,dv\,dw-6\sum_{a=1}^{m}\int\!\!\int_K\!\!\int\cos 2a\pi u\,du\,dv\,dw\\ -12\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int\!\!\int_K\!\!\int\cos 2a\pi u\cos 2b\pi v\,du\,dv\,dw\\ -8\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m}\int\!\!\int_K\!\!\int\cos 2a\pi u\cos 2b\pi v\cos 2c\pi w\,du\,dv\,dw\Big|\\ < a_5\,x^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Hierin ist erstens

$$(15)\qquad \int\!\!\int_K\!\!\int du\,dv\,dw=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}};$$

zweitens

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_K\!\!\int\cos 2a\pi u\,du\,dv\,dw &= \pi\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x-u^2)\cos 2a\pi u\,du\\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{x}}(x-u^2)\cos 2a\pi u\,du = 2\pi\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2u\sin 2a\pi u}{2a\pi}\,du\\ &= \frac{2}{a}\cdot\frac{-\sqrt{x}\cos 2a\pi\sqrt{x}}{2a\pi}+\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2a\pi}\int_0^{\sqrt{x}}\cos 2a\pi u\,du,\end{aligned}$$

also

$$\left| \int\int_K \int \cos 2a\pi u \, du \, dv \, dw \right| < a_6 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^2},$$

und daher

$$(16) \quad \left| 6 \sum_{a=1}^{m} \int\int_K \int \cos 2a\pi u \, du \, dv \, dw \right| < 6 a_6 x^{\frac{1}{2}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} = a_7 x^{\frac{1}{2}} \leqq a_7 x^{\frac{3}{4}}.$$

Setzt man (15) und (16) in (14) ein, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\int\int_K \int \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \cos 2c\pi w \, du \, dv \, dw$$

mit $P(x, a, b, c)$ bezeichnet wird, die Ungleichung

$$(17) \quad \left| A(x) - \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} - 12 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} P(x, a, b, 0) - 8 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} P(x, a, b, c) \right| < a_5 x^{\frac{3}{4}} + a_7 x^{\frac{3}{4}} = a_8 x^{\frac{3}{4}}.$$

§ 3. Abschätzung der Doppelsumme in (17).

Es ist

$$\begin{aligned} P(x, a, b, 0) &= \int\int_K \int \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{2} \int\int_K \int \cos 2\pi (au + bv) \, du \, dv \, dw \\ &\quad + \frac{1}{2} \int\int_K \int \cos 2\pi (au - bv) \, du \, dv \, dw ; \end{aligned}$$

diese beiden Integrale werden transformiert durch die orthogonale Substitution (der Determinante $+1$), welche w ungeändert läßt, während $\frac{au \pm bv}{\sqrt{a^2 + b^2}} = u'$ wird. Der Strich ist dann wieder fortgelassen. Das Integrationsgebiet bleibt dasselbe. Es wird

$$\int\int_K \int \cos 2\pi (au \pm bv) \, du \, dv \, dw = \int\int_K \int \cos 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, u \, du \, dv \, dw.$$

Daher ist weiter, wenn für $\sqrt{a^2 + b^2}$ zur Abkürzung r geschrieben

wird,

$$P(x,a,b,0) = \int\int\int_K \cos 2\pi r u \, du\, dv\, dw$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x-u^2)\cos 2\pi r u \, du = 2\pi \int_0^{\sqrt{x}} (x-u^2)\cos 2\pi r u \, du$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u \sin 2\pi r u}{2\pi r} du$$

$$= \frac{2}{r}\cdot\frac{-\sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}}{2\pi r} + \frac{2}{r}\cdot\frac{1}{2\pi r}\int_0^{\sqrt{x}} \cos 2\pi r u \, du$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi r^2}\,\frac{\sin 2\pi r\sqrt{x}}{2\pi r}.$$

Nun sei $1 \leqq y \leqq y_1 \leqq 2y$; dann ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_y^{y_1} \sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}\, dx = \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}} 2t^2 \cos 2\pi r t \, dt$$

$$= 2y_1 \int_\eta^{\sqrt{y_1}} \cos 2\pi r t \, dt \qquad (\sqrt{y} \leqq \eta \leqq \sqrt{y_1})$$

$$= \frac{2y_1}{2\pi r}(\sin 2\pi r\sqrt{y_1} - \sin 2\pi r\eta);$$

also ist

$$\left|\int_y^{y_1} P(x,a,b,0)\, dx\right| \leqq \frac{1}{\pi r^2}\cdot\frac{2y_1}{2\pi r}\cdot 2 + \frac{1}{\pi r^2}\cdot\frac{y_1-y}{2\pi r} \leqq a_9\frac{y}{r^3};$$

und daher

$$\left|12\int_y^{y_1}\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} P(x,a,b,0)\, dx\right| \leqq 12\, a_9\, y \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{r^3} = a_{10}\, y. \tag{18}$$

§ 4. **Vorbereitungen zur Abschätzung der dreifachen Summe in (17).**

Es ist

$$P(x,a,b,c) = \int\int\int_K \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \cos 2c\pi w \, du\, dv\, dw$$

$$= \frac{1}{4}\int\int\int_K \cos 2\pi(au+bv+cw)\, du\, dv\, dw$$

$$+\frac{1}{4}\int\int\int_K \cos 2\pi(au+bv-cw)\,du\,dv\,dw$$

$$+\frac{1}{4}\int\int\int_K \cos 2\pi(au-bv+cw)\,du\,dv\,dw$$

$$+\frac{1}{4}\int\int\int_K \cos 2\pi(au-bv-cw)\,du\,dv\,dw.$$

Diese vier Integrale werden transformiert durch eine orthogonale Substitution (der Determinante $+1$), bei der $\frac{au \pm bv \pm cw}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = u'$ wird. Der Strich ist dann wieder fortgelassen. Das Integrationsgebiet bleibt dasselbe. Es wird

$$\int\int\int_K \cos 2\pi(au \pm bv \pm cw)\,du\,dv\,dw$$

$$= \int\int\int_K \cos 2\pi \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\,du\,dv\,dw;$$

also erhält man, wenn für $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ zur Abkürzung r gesetzt wird,

$$P(x,a,b,c) = \int\int\int_K \cos 2\pi r u\,du\,dv\,dw$$

$$= \pi\int_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} (x-u^2)\cos 2\pi r u\,du = 2\pi\int_0^{\sqrt{x}} (x-u^2)\cos 2\pi r u\,du$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u\sin 2\pi r u}{2\pi r}\,du$$

$$= \frac{2}{r}\,\frac{-\sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}}{2\pi r} + \frac{2}{r}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos 2\pi r u}{2\pi r}\,du$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi r^2}\,\frac{\sin 2\pi r\sqrt{x}}{2\pi r}. \tag{19}$$

Es sei jetzt $1 \leqq y \leqq y_1 = y + y^{\frac{1}{4}} \leqq 2y$; dann folgt aus (19)

$$\int_y^{y_1} P(x,a,b,c)\,dx$$

$$= \frac{-1}{\pi r^2}\int_y^{y_1} \sqrt{x}\cos 2\pi r\sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2\pi^2 r^3}\int_y^{y_1} \sin 2\pi r\sqrt{x}\,dx \tag{20}$$

$$= \frac{-1}{\pi r^2}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}} 2t^2 \cos 2\pi r t\, dt + \frac{1}{2\pi^2 r^3}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}} 2t \sin 2\pi r t\, dt$$

$$= \frac{-1}{\pi r^2}\left\{\frac{2t^2 \sin 2\pi r t}{2\pi r} - \int \frac{4t \sin 2\pi r t}{2\pi r}\, dt - \frac{1}{2\pi r}\int 2t \sin 2\pi r t\, dt\right\}_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}}$$

$$= \frac{-1}{\pi^2 r^3}\left\{t^2 \sin 2\pi r t - 3\int t \sin 2\pi r t\, dt\right\}_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit Benutzung des zweiten Mittelwertsatzes die Abschätzung

$$\left|\int_y^{y_1} P(x,a,b,c)\, dx + \frac{\left\{t^2 \sin 2\pi r t\right\}_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y_1}}}{\pi^2 r^3}\right| \leqq \frac{3}{\pi^2 r^3}\sqrt{y_1}\,\frac{2}{2\pi r} \leqq a_{11}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{r^4};$$

und hieraus folgt für $1 \leqq z \leqq z_1 = z + z^{\frac{1}{4}} \leqq 2z$

$$\left|\int_z^{z_1} dy \int_y^{y_1} P(x,a,b,c)\, dx + \frac{1}{\pi^2 r^3}\int_z^{z_1} y_1 \sin 2\pi r \sqrt{y_1}\, dy\right.$$

$$(21)\qquad \left. - \frac{1}{\pi^2 r^3}\int_z^{z_1} y \sin 2\pi r \sqrt{y}\, dy\right| \leqq (z_1 - z)\, a_{11}\frac{z_1^{\frac{1}{2}}}{r^4} \leqq a_{12}\frac{z^{\frac{3}{4}}}{r^4}.$$

Nun ist erstens, wenn man die Substitution

$$t = \sqrt{y_1} = \sqrt{y + y^{\frac{1}{4}}},$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1 + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}}{2\sqrt{y + y^{\frac{1}{4}}}} = \frac{1 + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}}{2t}$$

macht,

$$\int_z^{z_1} y_1 \sin 2\pi r \sqrt{y_1}\, dy = \int_{\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1 + z_1^{\frac{1}{4}}}} \frac{2t^3}{1 + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}} \sin 2\pi r t\, dt;$$

der Ausdruck $\dfrac{2t^3}{1 + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}}$ ist eine positive, monoton wachsende Funktion von t; also ist auf obiges Integral der zweite Mittelwertsatz anwendbar und liefert, wenn der heraustretende Faktor gleich nach oben abgeschätzt wird,

$$(22)\qquad \left|\int_z^{z_1} y_1 \sin 2\pi r \sqrt{y_1}\, dy\right| \leqq a_{13} z_1^{\frac{3}{2}} \left|\int_{\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1 + z_1^{\frac{1}{4}}}} \sin 2\pi r t\, dt\right| \leqq a_{14}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{r}.$$

$$\left(z_1 \leqq \bar{z}_1 \leqq z_1 + z_1^{\frac{1}{4}}\right)$$

Zweitens ist

$$\int_z^{z_1} y \sin 2\pi r \sqrt{y}\, dy = \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{z_1}} 2t^3 \sin 2\pi r t\, dt,$$

also nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$(23) \quad \left| \int_z^{z_1} y \sin 2\pi r \sqrt{y}\, dy \right| \leqq a_{15} z_1^{\frac{3}{2}} \left| \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{z_1}} \sin 2\pi r t\, dt \right| \leqq a_{16} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{r}.$$

$$(z \leqq \bar{z} \leqq z_1)$$

Aus (21), (22), (23) ergibt sich

$$(24) \quad \left| \int_z^{z_1} dy \int_y^{y_1} P(x, a, b, c)\, dx \right| \leqq a_{12} \frac{z^{\frac{3}{4}}}{r^4} + a_{14} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 r^4} + a_{16} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 r^4} \leqq a_{17} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{r^4}.$$

Andrerseits ergibt sich ganz direkt aus (20) die Abschätzung

$$\left| \int_y^{y_1} P(x, a, b, c)\, dx \right| \leqq \frac{1}{\pi r^2} (y_1 - y) \sqrt{y_1} + \frac{1}{2\pi^2 r^3} (y_1 - y) \leqq a_{18} \frac{y^{\frac{3}{4}}}{r^2},$$

und hieraus weiter

$$(25) \quad \left| \int_z^{z_1} dy \int_y^{y_1} P(x, a, b, c)\, dx \right| \leqq (z_1 - z) a_{18} \frac{z_1^{\frac{3}{4}}}{r^2} \leqq a_{19} \frac{z}{r^2}.$$

§ 5. Beweis der Endformel.

Ehe die bisherigen Resultate zusammengefaßt und verwertet werden können, müssen noch zwei einfache Hilfssätze abgeleitet werden.

Hilfssatz 10: *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{U(n)}{n} \leqq a_{20} N^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Da eine Kugel nicht mehr Gitterpunkte enthält als ein ihr umschriebener Würfel, so ist

$$\sum_{n=0}^{N} U(n) = A(N) \leqq \left(2\left[\sqrt{N}\right] + 1\right)^3 \leqq 3^3 N^{\frac{3}{2}} = a_{21} N^{\frac{3}{2}};$$

also ist

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{U(n)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A(n)-A(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{A(0)}{1}+\frac{A(N)}{N+1}$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{21}n^{\frac{3}{2}}}{n^2}+\frac{a_{21}N^{\frac{3}{2}}}{N}$$

$$\leqq a_{21}\int_0^N \frac{dn}{n^{\frac{1}{2}}}+a_{21}N^{\frac{1}{2}}$$

$$= a_{21}2N^{\frac{1}{2}}+a_{21}N^{\frac{1}{2}} = a_{20}N^{\frac{1}{2}}.$$

Hilfssatz 11: *Es ist*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^2} \leqq a_{22}N^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Wie beim vorigen Beweise ist

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^2} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A(n)-A(n-1)}{n^2}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} A(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\frac{A(N)}{(N+1)^2}$$

$$\leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_{21}n^{\frac{3}{2}}(2n+1)}{n^4}$$

$$\leqq 3a_{21}\int_N^{\infty} \frac{dn}{n^{\frac{3}{2}}} = a_{22}N^{-\frac{1}{2}}.$$

Jetzt sei $z \geqq 4$ eine beliebige, aber feste Zahl. Dann gilt nach Hilfssatz 9 für $m \geqq M = M(z)$ und alle x der Strecke $z \leqq x \leqq 4z$ die Ungleichung (13), also die Relation (17) des § 2

$$(17)\quad \left|A(x)-\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}-12\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}P(x,a,b,0)-8\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m}P(x,a,b,c)\right| < a_8 x^{\frac{3}{4}};$$

daher ist für $m \geqq M = M(z)$ und alle y der Strecke $z \leqq y \leqq 2z$ da $y_1 = y + y^{\frac{1}{4}}$ ist,

$$(26)\quad \left| \int_y^{y_1} A(x)\,dx - \frac{4}{3}\pi \int_y^{y_1} x^{\frac{3}{2}}\,dx - 12 \int_y^{y_1} \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} P(x,a,b,0)\,dx \right.$$
$$\left. - 8 \int_y^{y_1} \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} P(x,a,b,c)\,dx \right|$$
$$\leqq a_8 (y_1 - y)\, y_1^{\frac{3}{4}} \leqq a_8\, y^{\frac{1}{4}} (2y)^{\frac{3}{4}} = a_{23}\, y.$$

Hierin ist nach dem Taylorschen Satz

$$\int_y^{y_1} x^{\frac{3}{2}}\,dx = (y_1 - y)\, y^{\frac{3}{2}} + \frac{(y_1 - y)^2}{2!} \cdot \frac{3}{2}\, \bar{y}^{\frac{1}{2}} \quad (y \leqq \bar{y} \leqq y_1),$$

also

$$(27)\quad \left| \frac{4}{3}\pi \int_y^{y_1} x^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{4}{3}\pi\, y^{\frac{7}{4}} \right| < a_{24}\, y.$$

Aus (26) ergibt sich nun durch Einsetzen von (27) und (18), dem Resultat des § 3,

$$\left| \int_y^{y_1} A(x)\,dx - \frac{4}{3}\pi\, y^{\frac{7}{4}} - 8 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} \int_y^{y_1} P(x,a,b,c)\,dx \right|$$
$$\leqq a_{23}\, y + a_{24}\, y + a_{10}\, y = a_{25}\, y;$$

folglich ist, da $z_1 = z + z^{\frac{1}{4}}$ ist, für $m \geqq M = M(z)$ auch

$$\left| \int_z^{z_1} dy \int_y^{y_1} A(x)\,dx - \frac{4}{3}\pi \int_z^{z_1} y^{\frac{7}{4}}\,dy - 8 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} \int_z^{z_1} dy \int_y^{y_1} P(x,a,b,c)\,dx \right|$$
$$(28)\qquad \leqq a_{25} (z_1 - z)\, z_1 \leqq a_{26}\, z^{\frac{5}{4}}.$$

Hierin ist erstens nach dem Taylorschen Satz

$$\int_z^{z_1} y^{\frac{7}{4}}\,dy = (z_1 - z)\, z^{\frac{7}{4}} + \frac{(z_1 - z)^2}{2!} \cdot \frac{7}{4}\, \bar{z}^{\frac{3}{4}} \quad (z \leqq \bar{z} \leqq z_1),$$

also

$$(29)\quad \left| \frac{4}{3}\pi \int_z^{z_1} y^{\frac{7}{4}}\,dy - \frac{4}{3}\pi z^2 \right| \leqq a_{27}\, z^{\frac{5}{4}}.$$

Zweitens folgt aus (24) und (25), wenn für r^2 jetzt n geschrieben wird (n bedeutet also $a^2 + b^2 + c^2$),

$$\left| 8 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} \int_{z}^{z_1} dy \int_{y}^{y_1} P(x, a, b, c)\, dx \right|$$

$$\leqq 8 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \sum_{c=1}^{m} \operatorname{Min}\left(\frac{a_{19} z}{n}, \frac{a_{17} z^{\frac{3}{2}}}{n^2} \right)$$

$$\leqq a_{28} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \operatorname{Min}\left(\frac{z}{n}, \frac{z^{\frac{3}{2}}}{n^2} \right)$$

$$= a_{28} z \sum_{n \leqq z^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n} + a_{28} z^{\frac{3}{2}} \sum_{n > z^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^2}$$

$$= a_{28} z \sum_{n=1}^{\left[z^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{U(n)}{n} + a_{28} z^{\frac{3}{2}} \sum_{n=\left[z^{\frac{1}{2}} \right]+1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^2},$$

also nach den Hilfssätzen 10 und 11

$$\leqq a_{28} z \,.\, a_{20} \left[z^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + a_{28} z^{\frac{3}{2}} \,.\, a_{22} \left[z^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqq a_{28} a_{20} z \,.\, z^{\frac{1}{4}} + a_{28} a_{22} z^{\frac{3}{2}} \left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad [1]$$

$$= a_{29} z^{\frac{5}{4}}. \qquad (30)$$

Aus (28), (29) und (30) folgt jetzt

$$\left| \int_{z}^{z_1} dy \int_{y}^{y_1} A(x)\, dx - \frac{4}{3} \pi z^2 \right| \leqq a_{26} z^{\frac{3}{4}} + a_{27} z^{\frac{3}{4}} + a_{29} z^{\frac{5}{4}} = a_{30} z^{\frac{5}{4}}.$$

Hieraus ergibt sich einerseits, da $z^{\frac{1}{4}} \,.\, z^{\frac{1}{4}}$ kleiner ist als das Integrationsgebiet in der x-y-Ebene und der Integrand $A(x)$ im Punkte $x = y = z$ seinen kleinsten Wert hat,

$$z^{\frac{1}{2}} A(z) \leqq \frac{4}{3} \pi z^2 + O\left(z^{\frac{5}{4}} \right),$$

$$A(z) \leqq \frac{4}{3} \pi z^{\frac{3}{2}} + O\left(z^{\frac{3}{4}} \right); \qquad (31)$$

andrerseits, da $z^{\frac{1}{4}} \,.\, z_1^{\frac{1}{4}}$ größer ist als das Integrationsgebiet und der

1) In der Tat ist $\left[z^{\frac{1}{2}} \right] \geqq z^{\frac{1}{2}} - 1 \geqq \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2}$, da $z \geqq 4$ vorausgesetzt ist.

Integrand $A(x)$ im Punkte $x = z_1 + z_1^{\frac{1}{4}}$, $y = z_1$ seinen größten Wert hat,

$$z^{\frac{1}{4}} z_1^{\frac{1}{4}} A\left(z_1 + z_1^{\frac{1}{4}}\right) \geqq \frac{4}{3}\pi z^2 + O\left(z^{\frac{5}{4}}\right).$$

Setzt man hierin $z_1 + z_1^{\frac{1}{4}} = z_2$, sodaß also

$$z = z_2 - z_1^{\frac{1}{4}} - z^{\frac{1}{4}} \geqq z_2 - 2z_2^{\frac{1}{4}}$$

ist, so ergibt sich

$$z_2^{\frac{1}{2}} A(z_2) \geqq \frac{4}{3}\pi\left(z_2 - 2z_2^{\frac{1}{4}}\right)^2 + O\left(z_2^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi z_2^2 + O\left(z_2^{\frac{5}{4}}\right),$$

also

$$A(z_2) \geqq \frac{4}{3}\pi z_2^{\frac{3}{2}} + O\left(z_2^{\frac{3}{4}}\right). \tag{32}$$

(31) und (32) ergeben zusammen, wenn für z und z_2 derselbe Buchstabe x geschrieben wird,

$$A(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right). \tag{3}$$

§ 6. Folgerungen.

1. Die soeben bewiesene Relation (3) läßt sich auch so schreiben

$$\sum_{n=1}^{x} \left(U(n) - 2\pi\sqrt{n}\right) = O\left(x^{\frac{3}{4}}\right). \tag{33}$$

Denn es ist

$$2\pi \sum_{n=1}^{x} \sqrt{n} = 2\pi \int_0^x \sqrt{u}\, du + O\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right),$$

womit (33) bewiesen ist.

Auf die demnach für $\sigma > \frac{3}{4}$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n) - 2\pi\sqrt{n}}{n^s}$$

läßt sich nun ein Satz[1]) von Herrn Marcel Riesz anwenden, der so lautet:

„Wenn für ein $c \gtreqless 0$ bei ganzzahlig wachsendem n

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n^c} = O(1) \tag{34}$$

ist und die infolgedessen für $\sigma > c$ reguläre Funktion

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

in einem bestimmten Punkte $s_0 = c + t_0 i$ der Geraden $\sigma = c$ regulär ist, so ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{s_0}} = O(1).\text{“} \tag{35}$$

In der Tat weiß man von der durch

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{3}{2}$ definierten Funktion, daß sie bis auf den Pol $s = \frac{3}{2}$ in der ganzen Ebene regulär ist[2]), und zwar läßt sich das mit Benutzung der bekannten Methoden ziemlich kurz folgendermaßen beweisen:

1) Dieser Satz ist publiziert in der Arbeit des Herrn Landau *Über eine idealtheoretische Funktion* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. XIII, 1912, S. 1—21] S. 18 f. Der dort mitgeteilte Beweis ist jedoch nicht verständlich ohne Kenntnis des § 10 der älteren Arbeit des Herrn Landau *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer* [Prace matematyczno-fizyczne, Bd. XXI, 1910, S. 97—177].

2) Vgl. z. B. Epstein, *Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen* [Mathematische Annalen, Bd. LVI, 1903, S. 615—644] § 3 und 4.

Aus der für $x > 0$ gültigen Cauchyschen Transformationsformel [1])

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}$$

folgt durch das Erheben in die dritte Potenz

$$(36) \quad \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)}{x}}.$$

Nun ist für reelle $s > 0$

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\, dx,$$

also, $n = \pi(a^2+b^2+c^2)$ gesetzt,

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s (a^2+b^2+c^2)^s} = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x}\, dx.$$

Wird jetzt über alle ganzen a, b, c außer 0, 0, 0 summiert, so erhält man, da

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^s} = \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^s}$$

ist, für $s > \frac{3}{2}$

$$(37) \quad \pi^{-s} g(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x}\, dx;$$

denn da nur positive Funktionen integriert und summiert werden, darf man die Reihenfolge dieser Operationen vertauschen.

Das Integral rechts wird jetzt bei $x = 1$ geteilt, und der erste Teil für sich umgeformt; es ist

$$\int_0^1 x^{s-1} \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^{s-1} \left\{ \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x} - 1 \right\} dx,$$

1) S. z. B. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin 1909, § 69.

also nach der Funktionalgleichung (36)

$$= \int_0^1 x^{s-1} \left\{ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)}{x}} + 1 \right) - 1 \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{s-1-\frac{3}{2}} - x^{s-1} \right) dx + \int_0^1 x^{s-\frac{5}{2}} \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)}{x}} dx$$

$$= \frac{1}{s-\frac{3}{2}} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{-s+\frac{5}{2}-2} \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x} dx.$$

Wenn man dies in (37) einsetzt, erhält man

$$\pi^{-s} g(s) \Gamma(s) - \frac{1}{s-\frac{3}{2}} + \frac{1}{s}$$

$$(38) \qquad = \int_1^\infty \left(x^{-s+\frac{1}{2}} + x^{s-1} \right) \sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x} dx,$$

und hierin ist nun die rechte Seite für alle komplexen s konvergent, und zwar bei beliebig großem ω für $|\sigma| \leqq \omega$ gleichmäßig konvergent; denn es gelten die Abschätzungen

$$\sum_{a,b,c=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\pi(a^2+b^2+c^2)x} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \right)^3 - 1$$

$$\leqq \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n x} \right)^3 - 1$$

$$= O\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n x} \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{e^{\pi x} - 1} \right)$$

$$= O\left(e^{-\pi x} \right),$$

und

$$\left| x^{-s+\frac{1}{2}} + x^{s-1} \right| \leqq 2 x^{\omega+1}.$$

Das Integral in (38) ist also als gleichmäßige Grenze ganzer Funktionen selbst eine ganze Funktion.

Damit ist bewiesen, daß $g(s)\Gamma(s)$ regulär ist bis auf die Pole erster Ordnung $s = \frac{3}{2}$ und $s = 0$. In $s = 0$ hat $\Gamma(s)$ einen Pol, in $s = \frac{3}{2}$ nicht. Der Punkt $s = \frac{3}{2}$ bleibt also als einziger Pol von $g(s)$ übrig.

Für $f(s) = g(s) - 2\pi\zeta\left(s - \frac{1}{2}\right)$ sind also in jedem Punkt der Geraden $\sigma = c = \frac{3}{4}$ sämtliche Voraussetzungen des Rieszschen Satzes erfüllt; denn (34) ist gerade durch (33) erfüllt. Für jedes feste t_0 gilt daher (35), d. h.

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{U(n) - 2\pi\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4} + t_0 i}} = O(1).$$

Für $t_0 = 0$ ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} \frac{U(n)}{n^{\frac{3}{4}}} &= 2\pi \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + O(1) \\ &= 2\pi \int_0^x \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}} + O(1) + O(1) \\ &= \frac{8\pi}{3} x^{\frac{3}{4}} + O(1). \end{aligned}$$

2. Herr Sierpiński[1]) hat zuerst $A(x)$ abgeschätzt, um ein Resultat über $S(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{U(n)}{n}$ zu gewinnen. Herr Landau hat dann[2]) auf Grund seiner Abschätzung (2) die schärfere Relation

$$S(x) = 4\pi\sqrt{x} + c + O\left(x^{-\frac{1}{4} + \varepsilon}\right)$$

gegeben. Hierin kann ich nun ebenfalls das ε im Exponenten

---

1) Sierpiński, *O pewnej sumie potrójnej* (Sur une somme triple) [Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie, Bd. II, 1909, S. 117—120].

2) I S. 693.

streichen. Ich setze die Rechnung[1]), die dazu führt, hierher, da Herr Landau nur das Resultat angibt.

Es ist

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{U(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{A(n)-A(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} A(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{A(0)}{1}+\frac{A(x)}{[x]}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} A(n)\int_{n}^{n+1}\frac{du}{u^2}-\frac{A(0)}{1}+\frac{A(x)}{[x]}$$

$$= \int_{1}^{[x]}\frac{A(u)}{u^2}\,du-1+\frac{A(x)}{[x]}. \tag{39}$$

Nach (3) ist

$$\int_{[x]}^{x}\frac{A(u)}{u^2}\,du = O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}\right) = O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{40}$$

und

$$\frac{A(x)}{[x]}-\frac{A(x)}{x} = A(x)\int_{[x]}^{x}\frac{du}{u^2} = O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}\right) = O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{41}$$

Aus (39) ergibt sich in Verbindung mit (40) und (41)

$$S(x) = \int_{1}^{x}\frac{A(u)}{u^2}\,du-1+\frac{A(x)}{x}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{42}$$

Setzt man nun

$$\eta(x) = A(x)-\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}},$$

sodaß also, jetzt unter vollständiger Ausnutzung von (3),

$$\frac{\eta(x)}{x^2} = O\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)$$

ist, so folgt aus (42)

---

1) Der Beweis ist dem auf S. 7 f. der am Anfang dieses § 6 zitierten Arbeit des Herrn Landau in den Transactions stehenden Übergang von $\tau_1(x)$ zu $\tau_1(x;s)$ nachgebildet. Natürlich könnte man auch hier mit beliebigem s rechnen; ich wähle aber $s=1$, weil Herr Sierpiński diesen Fall behandelt hat.

$$S(x) = \frac{4}{3}\pi \int_1^x \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} + \int_1^x \frac{\eta(u)}{u^2}\,du - 1 + \frac{4}{3}\pi x^{\frac{1}{2}} + \frac{\eta(x)}{x} + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(2x^{\frac{1}{2}} - 2\right) + c' + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) - 1 + \frac{4}{3}\pi x^{\frac{1}{2}} + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= 4\pi\sqrt{x} + c + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Zweiter Teil.

Über die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in zwei $n$te Potenzen.

Es bezeichne, wie in der Einleitung, $A_n(x)$ für jedes $n \geq 2$ die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

$$|u|^n + |v|^n \leqq x,$$

das mit K bezeichnet werden möge. Das Ziel dieses zweiten Teiles ist der Beweis der Relation

$$A_n(x) = Jx^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{2n-1}}\right), \tag{5}$$

wo

$$J = 4\int_0^1 \sqrt[n]{1-t^n}\, dt$$

ist.

§ 7. Approximation von $A_n(x)$ durch ein Doppelintegral.

Aus § 1 werden hier die Definition und die einfachsten Eigenschaften von $\varphi_m(u)$, sowie die Hilfssätze 1—3 vorausgesetzt. Die Hilfssätze 4′—9′ sind den Hilfssätzen 4—9 des § 1 analog und dem entsprechend numeriert.

Hilfssatz 4′: *Es seien λ und μ beliebige ganze Zahlen; es sei $0 \leq x_1 < x_2$. Der Ring $x_1 \leqq |u|^n + |v|^n \leqq x_2$ möge mit dem Quadrat*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1$$

das Gebiet G gemeinsam haben. Dann ist

$$\left| \int_G \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq 24.$$

Beweis: Ich zerlege das Quadrat durch die Mittellinien und Diagonalen in acht rechtwinklige Dreiecke. G zerfällt dadurch in ein bis acht Teilgebiete, deren jedes sowohl die Gestalt

$$u_1 \leqq u \leqq u_2, \quad g_1(u) \leqq v \leqq g_2(u)$$

als auch die Gestalt

$$v_1 \leqq v \leqq v_2, \quad f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v)$$

hat, wo $g_1(u)$, $g_2(u)$, $f_1(v)$, $f_2(v)$ stetig sind. Wegen der Symmetrieeigenschaften von $\varphi_m(u)$ braucht nur für ein solches Teilgebiet H

$$\left| \int_H \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq 3$$

bewiesen zu werden; und wegen der Periodizitätseigenschaften von $\varphi_m(u)$ kann für den Beweis angenommen werden, daß H folgende Gestalt hat

$$0 \leqq v_1 \leqq v \leqq v_2 \leqq \frac{1}{2},$$

$$0 \leqq v \leqq f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v) \leqq \frac{1}{2}.$$

Nun ist

$$\int_H \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \varphi_m(v)\, dv \int_{f_1(v)}^{f_2(v)} \varphi_m(u)\, du.$$

Hierin ist nach Hilfssatz 1 für $v_1 < v \leqq v_2$

$$\left| \int_{f_1(v)}^{f_2(v)} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq \left| \int_{f_1(v)}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| + \left| \int_{f_2(v)}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right|$$

$$< \frac{1}{6\,m\,f_1(v)} + \frac{1}{6\,m\,f_2(v)} \leqq \frac{1}{6\,m\,v} + \frac{1}{6\,m\,v} = \frac{1}{3\,m\,v},$$

und nach Hilfssatz 2 für $v_1 \leqq v \leqq v_2$

$$\left| \int_{f_1(v)}^{f_2(v)} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 4.$$

Also ist nach (8) und (9)

$$\left| \int_H \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq \int_{v_1}^{v_2} |\varphi_m(v)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{3mv}, 4\right) dv$$

$$< \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(v)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{3mv}, 4\right) dv \leqq \int_0^{\frac{1}{6m}} 3m \cdot 4\, dv + \int_{\frac{1}{6m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2v} \cdot \frac{1}{3mv}\, dv$$

$$< \frac{1}{6m} \cdot 12m + \frac{1}{6m} \int_{\frac{1}{6m}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} = 2 + \frac{1}{6m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{6m}} = 2 + 1 = 3.$$

Im Ganzen ist also

$$\left| \int_G \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq 8 \cdot 3 = 24.$$

Hilfssatz 5′: *Es seien λ und μ ganze Zahlen, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. In dem Quadrat*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1$$

liege ein Gebiet G, das eine der folgenden beiden Gestalten habe:

$$\text{I.} \begin{cases} u_1 \leqq u \leqq u_2, \quad g_1(u) \leqq v \leqq g_2(u), \\ \text{wo } \mu + \varepsilon \leqq g_1(u) \leqq g_2(u) \leqq \mu + 1 - \varepsilon \text{ ist;} \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} v_1 \leqq v \leqq v_2, \quad f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v), \\ \text{wo } \lambda + \varepsilon \leqq f_1(v) \leqq f_2(v) \leqq \lambda + 1 - \varepsilon \text{ ist;} \end{cases}$$

in beiden Fällen seien die auftretenden Funktionen $g_1(u)$, $g_2(u)$, $f_1(v)$, $f_2(v)$ stetig. Dann ist

$$\left| \int_G \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq \frac{3 + \log m}{3m\varepsilon}.$$

Beweis: Es genügt aus Symmetriegründen einen Fall, etwa II, zu betrachten. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\left| \int_{f_1(v)}^{f_2(v)} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq \left| \int_{f_1(v)-\lambda}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| + \left| \int_{f_2(v)-\lambda}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right|$$

$$< \frac{1}{6m\varepsilon} + \frac{1}{6m\varepsilon} = \frac{1}{3m\varepsilon};$$

also folgt mit Hilfssatz 3

$$\left| \int_G \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leq \int_{v_1}^{v_2} |\varphi_m(v)| \left| \int_{f_1(v)}^{f_2(v)} \varphi_m(u)\, du \right| dv$$

$$\leqq \int_{v_1}^{v_2} |\varphi_m(v)| \frac{1}{3\,m\,\varepsilon}\, dv \leq \frac{1}{3\,m\,\varepsilon} \int_0^1 |\varphi_m(v)|\, dv \leq \frac{3+\log m}{3\,m\,\varepsilon}.$$

Hilfssatz 6′: *Es sei $x > 0$, aber nicht ganz. Dann ist*

$$\lim_{m=\infty} \int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = A_n(x).$$

Beweis: Für jedes dem Gebiete K ganz angehörende Gitterquadrat Q ist

$$\int_Q \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = \int_0^1 \varphi_m(u)\, du \cdot \int_0^1 \varphi_m(v)\, dv = 1,$$

also

$$\lim_{m=\infty} \int_Q \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = 1.$$

In jedem dem Gebiet K teilweise angehörenden Gitterquadrat ziehe ich in einem passend gewählten Abstand $\vartheta < \frac{1}{2}$ vier Parallelen zu den Seiten, so daß jedes der vier kleinen Quadrate in den Ecken entweder ganz im Innern oder ganz im Äußeren von K liegt. Das in dem Quadrat liegende Stück von K zerfällt dadurch in ein bis drei solche Eckquadrate von der Seitenlänge ϑ und höchstens fünf andere Gebiete. Für jedes Eckquadrat ist nach Hilfssatz 1

$$\int\int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \cdot \int_0^{\vartheta} \varphi_m(v)\, dv$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right)^2 \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

Auf jedes der anderen Gebiete ist Hilfssatz 5′ mit $\varepsilon = \vartheta$ anwendbar; das über diese Gebiete erstreckte Doppelintegral strebt also für $m = \infty$ gegen 0.

Allgemein kann man daher sagen: Jedes Gitterquadrat trägt zum Limes des Integrals so viel mal $\frac{1}{4}$ bei, als Ecken von ihm im Innern von K liegen. Das bedeutet aber, daß jeder Gitterpunkt in K zum Limes des Integrals $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ beiträgt; also ist

$$\lim_{m=\infty} \int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv$$

vorhanden und hat genau den Wert $A_n(x)$.

Hilfssatz 7': *Es gibt, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, eine nur von n und ε abhängende Konstante $c_1 = c_1(n, \varepsilon)$, sodaß die Anzahl $U_n(N)$ der ganzzahligen Lösungen von*

$$|u|^n + |v|^n = N$$

für jedes $N \geqq 1$ der Ungleichung genügt

$$U_n(N) < c_1 N^{\varepsilon}.$$

Beweis: 1) n sei ungerade; dann ist

$$\begin{aligned} N = |u|^n + |v|^n &= (|u| + |v|)\,(|u|^{n-1} \mp \cdots + |v|^{n-1}) \\ &= \alpha \cdot \beta \qquad\qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \end{aligned}$$

Das gibt $T(N)$ Wertepaare α, β, und für jedes hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= \alpha, \\ \xi^{n-1} \mp \cdots + \eta^{n-1} &= \beta \end{aligned}$$

$n-1$ Lösungen, also höchstens $n-1$ Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen $|u|, |v|$. Wertepaare u, v gibt es dann höchstens $4(n-1)$; also ist

$$U_n(N) \leqq 4(n-1)\, T(N) = O\left(N^{\varepsilon}\right).$$

2) n sei gerade; dann ist

$$N = u^n + v^n = \left(u^{\frac{n}{2}}\right)^2 + \left(v^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Das gibt [1]) $U(N)$ Wertepaare α, β und zu jedem höchstens vier Wertepaare in ganzen rationalen Zahlen u, v; also ist in diesem Falle

$$U_n(N) \leqq 4\, U(N) = O\left(N^{\varepsilon}\right).$$

Da $U_n(N)$ im Anfang beschränkt ist, gibt es also ein $c_1 = c_1(n, \varepsilon)$ mit der im Satze geforderten Eigenschaft.

Hilfssatz 8': *Es gibt, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, ein $c_2 = c_2(n, \varepsilon)$ und zu jedem ganzen $y > 1$ ein $m_0 = m_0(y)$, sodaß für $m \geqq m_0$ und $y \leqq x_1 < x_2 \leqq y + 1$, wenn R das Gebiet $x_1 \leqq |u|^n + |v|^n \leqq x_2$ bezeichnet,*

1) Vgl. den Beweis von Hilfssatz 7, wo $U(N)$ erklärt ist und die Relation $U(N) = O(N^{\varepsilon})$ auf $T(N) = O(N^{\varepsilon})$ zurückgeführt wird.

$$\left| \int_R \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| < c_2 y^{\varepsilon}$$

ist.

Beweis: Das Gebiet $y \leqq |u|^n + |v|^n \leqq y+1$, von dem R ein Teil ist, heiße R'. Die Gitterquadrate, die mit R' mindestens einen Punkt gemeinsam haben, sind von zweierlei Art. Die einen haben eine Ecke auf dem Rande von R'; ihre Anzahl ist höchstens

$$4U_n(y) + 4U_n(y+1),$$

also nach Hilfssatz 7'

$$< 4c_1 y^{\varepsilon} + 4c_1 (y+1)^{\varepsilon} \leqq 4c_1 y^{\varepsilon} + 4c_1 (2y)^{\varepsilon} = c_3 y^{\varepsilon}.$$

In den andern ziehe ich vier Parallelen in passend gewähltem Abstand $\vartheta < \frac{1}{2}$ zu den Seiten, sodaß die vier Eckquadrate keinen Punkt mit R' gemeinsam haben. Das gemeinsame Gebiet von R mit dem Quadrat wird dadurch in (höchstens 5) Teile zerlegt, auf deren jeden Hilfssatz 5' anwendbar ist, und zwar mit $\varepsilon = \vartheta$, gleichmäßig für alle R, d. h. für alle x_1, x_2. Das Doppelintegral über das gemeinsame Gebiet von R und dem Quadrat strebt also für $m = \infty$ gleichmäßig in x_1, x_2 gegen 0.

Man erhält daher im Ganzen mit Benutzung von Hilfssatz 4' die für $m \geqq m_0 = m_0(y)$ gültige Abschätzung

$$\left| \int_R \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| < 24 c_3 y^{\varepsilon} + 1 \leqq c_2 y^{\varepsilon}.$$

Hilfssatz 9': *Es gibt, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, ein $c_4 = c_4(n, \varepsilon)$ und zu jedem $X \geqq 1$ ein $M = M(X)$, sodaß für $m \geqq M$ und gleichmäßig für alle x der Strecke $X \leqq x \leqq 2X$*

$$\left| \int_K \int \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv - A_n(x) \right| < c_4 x^{\varepsilon} \tag{43}$$

ist.

Beweis: Es genügt, die Existenz einer solchen Konstanten c_4 zu beweisen, daß, wenn y eine beliebige positive ganze Zahl ist, (43) für $m \geqq M(y)$ und für alle x der Strecke $y \leqq x < y+1$ gilt.

Nach Hilfssatz 6' ist, da $y + \frac{1}{2}$ nicht ganz ist, für $m \geqq m_1(y)$

$$\left| \iint\limits_{|u|^n+|v|^n \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - A_n\left(y+\frac{1}{2}\right) \right| < 1,$$

worin wegen $y \leqq x < y+1$

$$A_n\left(y+\frac{1}{2}\right) = A_n(y) = A_n(x)$$

ist. Nach Hilfssatz 8′ ist für $m \geqq m_0(y)$ gleichmäßig in x

$$\left| \iint\limits_{K} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - \iint\limits_{|u|^n+|v|^n \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv \right| < c_2\, y^{\varepsilon}.$$

Daher ist für $m \geqq \mathrm{Max}\,(m_0, m_1) = M(y)$

$$(43) \qquad \left| \iint\limits_{K} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - A_n(x) \right| < 1 + c_2\, y^{\varepsilon} \leqq c_4\, y^{\varepsilon} \leqq c_4\, x^{\varepsilon}.$$

§ 8. Umformung des Doppelintegrals.

Es ist identisch

$$\varphi_m(u)\,\varphi_m(v) = 1 + (\varphi_m(u)-1) + (\varphi_m(v)-1) + (\varphi_m(u)-1)\,(\varphi_m(v)-1);$$

die Ungleichung (43) des Hilfssatzes 9′ geht also in folgende über

$$\left| A_n(x) - \iint\limits_{K} du\,dv - 2\iint\limits_{K} (\varphi_m(u)-1)\,du\,dv - \iint\limits_{K} (\varphi_m(u)-1)\,(\varphi_m(v)-1)\,du\,dv \right| < c_4\, x^{\varepsilon}$$

oder, nach der Definition (6) von $\varphi_m(u)$ und weil

$$\iint\limits_{K} du\,dv = 4\int_0^{\sqrt[n]{x}} \sqrt[n]{x-u^n}\,du = 4x^{\frac{2}{n}} \int_0^1 \sqrt[n]{1-t^n}\,dt = J x^{\frac{2}{n}}$$

ist,

$$(44) \qquad \left| A_n(x) - J x^{\frac{2}{n}} - 4\sum_{a=1}^{m} \iint\limits_{K} \cos 2a\pi u\,du\,dv - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} \iint\limits_{K} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v\,du\,dv \right| < c_4\, x^{\varepsilon}.$$

§ 9. Hilfssätze.

Hilfssatz 12: *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \lambda \leq 1$, $\omega > 0$, $\varrho \gtrless 0$. *Dann ist*

$$\left| \int_{\varkappa}^{\lambda} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left\{ \omega \left(\varrho t \pm \sqrt[n]{1-t^n} \right) \right\} dt \right| \leqq \frac{8}{\sqrt[n]{\omega}} .$$

Beweis: Die Ungleichung der Behauptung geht in sich über, wenn man das Vorzeichen vor der Wurzel ändert und zugleich $-\varrho$ für ϱ setzt. Es stehe also ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Minuszeichen.

Man setze für $0 \leqq t < 1$

$$g(t) = \frac{d}{dt}\left(\varrho t - \sqrt[n]{1-t^n}\right)$$

$$= \varrho + \frac{t^{n-1}}{(1-t^n)^{\frac{n-1}{n}}} = \varrho + \frac{1}{(t^{-n}-1)^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$g'(t) = \frac{(n-1)t^{-n-1}}{(t^{-n}-1)^{\frac{2n-1}{n}}} = \frac{(n-1)t^{n-2}}{(1-t^n)^{\frac{2n-1}{n}}} \geqq 0;$$

also nimmt $g(t)$ von $g(0) = \varrho$ bis $g(1) = +\infty$ monoton zu und besitzt für $\varrho \leqq 0$ eine Nullstelle τ im Intervall, für $\varrho > 0$ nicht.

Das Intervall $0 \cdots \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}$ hat eventuell mit $\varkappa \ldots \lambda$ eine Strecke gemeinsam; das über diese erstreckte Integral ist absolut genommen

$$\leqq \int_0^{\sqrt[n]{\omega}^{-2}} dt = \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}} .$$

1) $\varrho \leqq 0$, also τ vorhanden. Das Intervall $\tau - \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}} \cdots \tau + \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$ hat eventuell mit $\varkappa \ldots \lambda$ eine Strecke gemeinsam; das über diese erstreckte Integral ist absolut genommen

$$\leqq \int_{\tau - \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}}^{\tau + \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}} dt = \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}} .$$

Für jeden andern, von $t = 1$ verschiedenen Punkt von $\varkappa \ldots \lambda$, für den also

$$1 > t \geqq \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}} \quad \text{und} \quad |t - \tau| \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$$

gilt, hat man, wenn $\tau \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$ ist,

$$\begin{aligned} g(t) &= g(\tau) + (t-\tau)g'(\xi) \qquad (\tau < \xi < t \text{ oder } t < \xi < \tau) \\ &= (t-\tau)g'(\xi); \end{aligned}$$

wenn dagegen $0 \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$ ist, hat man

$$\begin{aligned} g(t) \geqq g\left(\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}\right) &= g\left(\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}\, g'(\xi) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\omega}} < \xi < \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}\right); \end{aligned}$$

bei jedem Wert von τ ergibt sich daher wegen

$$g'(\xi) = \frac{(n-1)\,\xi^{n-2}}{(1-\xi^n)^{\frac{2n-1}{n}}} \geqq \frac{1}{\omega^{\frac{n-2}{n}}}$$

die Abschätzung

$$|g(t)| \geqq \frac{1}{\omega^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{\omega^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{1}{\omega^{\frac{n-1}{n}}}.$$

2) $\varrho > 0$. In diesem Falle erhält man für $\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}} \leqq t < 1$ direkt

$$g(t) > \frac{t^{n-1}}{(1-t^n)^{\frac{n-1}{n}}} > \frac{1}{\omega^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Jedenfalls gilt also auf dem Stück oder den beiden Stücken von $\varkappa \ldots \lambda$, wo $\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}} \leqq t < 1$, aber nicht $|t-\tau| < \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$ ist (mag nun τ vorhanden sein oder nicht), die Ungleichung

$$|g(t)| \geqq \frac{1}{\omega^{\frac{n-1}{n}}}$$

und die Identität

$$\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left\{ \omega\left(\varrho t - \sqrt[n]{1-t^n}\right) \right\} = \frac{1}{\omega\, g(t)} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \sin \\ -\cos \end{Bmatrix} \left\{ \omega\left(\varrho t - \sqrt[n]{1-t^n}\right) \right\}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist daher für jede dieser Strecken

$$\left| \int \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left\{ \omega\left(\varrho t - \sqrt[n]{1-t^n}\right) \right\} dt \right| < \frac{1}{\omega^{\frac{1}{n}} \cdot \omega^{\frac{n-1}{n}}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}.$$

Also ergibt sich im ganzen

$$\left|\int_{\varkappa}^{\lambda} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\omega\left(\varrho t-\sqrt[n]{1-t^n}\right)\right\} dt\right| \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}+\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}+2\,\frac{2}{\sqrt[n]{\omega}}=\frac{8}{\sqrt[n]{\omega}},$$

und damit ist Hilfssatz 12 bewiesen.

Hilfssatz 13: *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \lambda \leqq 1$, $\omega > 0$, $\varrho \gtrless 0$. *Dann ist für* $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\left|\int_{\varkappa}^{\lambda} \left(\sqrt[n]{1-t^n}\right)^{\nu} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\omega\left(\varrho t \pm \sqrt[n]{1-t^n}\right)\right\} dt\right| \leqq \frac{8}{\sqrt[n]{\omega}}.$$

Beweis: Für $\nu = 0$ ist es der Hilfssatz 12. Es sei also $\nu > 0$; dann ist $(1-t^n)^{\frac{\nu}{n}}$ auf der Strecke 0 bis 1 monoton abnehmend, $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz und Hilfssatz 12, weil $0 \leqq \varkappa' \leqq \lambda' \leqq 1$ ist,

$$\left|\int_{\varkappa}^{\lambda} \left(\sqrt[n]{1-t^n}\right)^{\nu} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\omega\left(\varrho t \pm \sqrt[n]{1-t^n}\right)\right\} dt\right| = \left|\int_{\varkappa'}^{\lambda'} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\omega\left(\varrho t \pm \sqrt[n]{1-t^n}\right)\right\} dt\right| \leqq \frac{8}{\sqrt[n]{\omega}}.$$

§ 10. **Abschätzung der einfachen Summe in (44).**

Es ist

$$\begin{aligned}\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv &= 4\int_0^{\sqrt[n]{x}} \frac{\sin 2a\pi\sqrt[n]{x-v^n}}{2a\pi}\,dv\\ &= \frac{2\sqrt[n]{x}}{a\pi}\int_0^1 \sin 2a\pi\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{1-t^n}\,dt.\end{aligned}$$

Also ist nach Hilfssatz 12 mit $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$, $\omega = 2a\pi\sqrt[n]{x}$, $\varrho = 0$

$$\left|\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq \frac{2\sqrt[n]{x}}{a\pi}\cdot\frac{8}{\sqrt[n]{2a\pi\sqrt[n]{x}}} = c_5\,\frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{a^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}};$$

folglich ist

$$(45)\qquad \left|4\sum_{a=1}^{m}\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq 4c_5\,x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}} = c_6\,x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

(45) wird später in (44) eingesetzt werden.

§ 11. Abschätzung von P und $\int P d\xi$.

Ich setze zur Abkürzung

$$\int_K\int \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du\, dv = P(x,a,b).$$

Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} P(x,a,b) &= 4\int_0^{\sqrt[n]{x}} \cos 2a\pi u \frac{\sin 2b\pi \sqrt[n]{x-u^n}}{2b\pi} du \\ &= \frac{2\sqrt[n]{x}}{b\pi}\int_0^1 \cos 2a\pi \sqrt[n]{x}t \sin 2b\pi \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{1-t^n}\, dt \\ &= \frac{\sqrt[n]{x}}{b\pi}\left\{\int_0^1 \sin 2\pi \sqrt[n]{x}\,(at+b\sqrt[n]{1-t^n})dt \right. \\ &\qquad \left. -\int_0^1 \sin 2\pi\sqrt[n]{x}\,(at-b\sqrt[n]{1-t^n})\,dt\right\}; \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich nach Hilfssatz 12 mit $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$, $\omega = 2\pi b\sqrt[n]{x}$, $\varrho = \frac{a}{b}$ die Abschätzung

$$|P(x,a,b)| \leqq \frac{\sqrt[n]{x}}{b\pi}\cdot 2\cdot \frac{8}{\sqrt[n]{2\pi b\sqrt[n]{x}}} = c_7 \frac{x^{\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}}{b},$$

also, wenn $1 \leqq x < x_1 \leqq 2x$ ist,

$$(46)\qquad \left|\int_x^{x_1} P(\xi,a,b)\,d\xi\right| \leqq c_7 (x_1-x) x_1^{\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}} \leqq c_8 (x_1-x) x^{\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}.$$

Andrerseits ist

$$P(\xi,a,b) = \frac{2}{b\pi}\int_0^{\sqrt[n]{\xi}} \cos 2a\pi u \sin 2b\pi \sqrt[n]{\xi-u^n}\, du,$$

also

$$\begin{aligned} \int_x^{x_1} P(\xi,a,b)\,d\xi &= \frac{2}{b\pi}\int_x^{x_1} d\xi \int_0^{\sqrt[n]{\xi}} \cos 2a\pi u \sin 2b\pi\sqrt[n]{\xi-u^n}\, du \\ &= \frac{2}{b\pi}\int_0^{\sqrt[n]{x_1}} \cos 2a\pi u\, du \int_{\mathrm{Max}\,(x,u^n)}^{x_1} \sin 2b\pi\sqrt[n]{\xi-u^n}\, d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist unbestimmt integriert

$$\int \sin 2b\pi \sqrt[n]{\xi - u^n}\, d\xi = \int \sin 2b\pi \sqrt[n]{\xi - u^n}\, d(\xi - u^n)$$

$$= \int n v^{n-1} \sin 2b\pi v\, dv$$

$$= \frac{-n v^{n-1} \cos 2b\pi v}{2b\pi} + \int \frac{n(n-1) v^{n-2} \cos 2b\pi v}{2b\pi}\, dv$$

$$= \frac{-n v^{n-1} \cos 2b\pi v}{2b\pi} + \frac{n(n-1) v^{n-2} \sin 2b\pi v}{(2b\pi)^2}$$

$$- \int \frac{n(n-1)(n-2) v^{n-3} \sin 2b\pi v}{(2b\pi)^2}\, dv.$$

Durch fortgesetztes partielles Integrieren ergibt sich schließlich

$$\int \sin 2b\pi \sqrt[n]{\xi - u^n}\, d\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1) v^{n-\nu} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 2b\pi v}{(2b\pi)^\nu}.$$

Wenn man dies oben einsetzt, erhält man

$$\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi$$

$$= \frac{2}{b\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{(2b\pi)^\nu} \left\{ \int_0^{\sqrt[n]{x_1}} (\sqrt[n]{x_1 - u^n})^{n-\nu} \cos 2a\pi u \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 2b\pi \sqrt[n]{x_1 - u^n}\, du \right.$$

$$\left. - \int_0^{\sqrt[n]{x}} (\sqrt[n]{x - u^n})^{n-\nu} \cos 2a\pi u \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 2b\pi \sqrt[n]{x - u^n}\, du \right\}$$

$$\pm \frac{2n!}{b\pi (2b\pi)^n} \int_{\sqrt[n]{x}}^{\sqrt[n]{x_1}} \cos 2a\pi u \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 0\, du.$$

In diesen Integralen (mit Ausnahme des letzten) wird u durch $\sqrt[n]{x_1}\, t$ oder $\sqrt[n]{x}\, t$ ersetzt und die Formel

$$2 \cos \alpha \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \beta = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (\alpha + \beta) \pm \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (\alpha - \beta)$$

angewendet; dann liefert Hilfssatz 13 mit $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$, $\omega = 2\pi b \sqrt[n]{x_1}$ oder $2\pi b \sqrt[n]{x}$, $\varrho = \frac{a}{b}$

$$\left| \int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi \right|$$

$$\leqq \frac{1}{b\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{(2b\pi)^\nu} \left\{ 2\, \frac{(\sqrt[n]{x_1})^{n-\nu+1} \cdot 8}{\sqrt[n]{2\pi b}\sqrt[n]{x_1}} + 2\, \frac{(\sqrt[n]{x})^{n-\nu+1} \cdot 8}{\sqrt[n]{2\pi b}\sqrt[n]{x}} \right\} + \frac{2n!}{b^{n+1}}$$

$$< \frac{1}{b\pi} \cdot \frac{n!}{2b\pi} \cdot \frac{16 \cdot n}{\sqrt[n]{2b\pi}} \left(x_1^{1-\frac{1}{n^2}} + x^{1-\frac{1}{n^2}} \right) + \frac{2n!}{b^{2+\frac{1}{n}}}$$

$$(47) \qquad < c_9 \frac{x^{1-\frac{1}{n^2}}}{b^{2+\frac{1}{n}}},$$

da $1 \leqq x < x_1 \leqq 2x$ ist.

§ 12. Beweis der Endformel.

Es sei $x \geq 1$ und fest. Dann gilt nach Hilfssatz 9′, wenn man ξ statt x schreibt, für $m \geq M(x)$ und $x \leqq \xi \leqq 2x$, gleichmäßig in ξ, die Ungleichung (43) also (44), also nach Berücksichtigung von (45) folgende Ungleichung

$$\left| A_n(\xi) - J\xi^{\frac{2}{n}} - 4 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} P(\xi, a, b) \right| \leq c_4 \xi^{\varepsilon} + c_6 \xi^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} < c_{10} x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}},$$

wo c_{10} nur von n abhängt. Jetzt sei $x_1 = x + x^\mu$; μ bedeute $\frac{2n-3}{2n-1}$, sodaß also jedenfalls $x < x_1 \leqq 2x$ ist; folglich ist für $m > M(x)$

$$\left| \int_x^{x_1} A_n(\xi)\, d\xi - J \int_x^{x_1} \xi^{\frac{2}{n}}\, d\xi - 4 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi \right|$$

$$(48) \qquad \leqq c_{10}(x_1 - x) x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = c_{10} x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \mu}.$$

Hierin ist erstens

$$J \int_x^{x_1} \xi^{\frac{2}{n}}\, d\xi = J x^\mu x^{\frac{2}{n}} + J \frac{x^{2\mu}}{2!} \cdot \frac{2}{n} \xi'^{\frac{2}{n}-1} \qquad (x \leqq \xi' < x_1),$$

also

$$(49)\qquad \left| J\int_x^{x_1} \xi^{\frac{2}{n}}\, d\xi - J x^{\frac{2}{n}+\mu} \right| \leqq \frac{J}{n}\, x^{2\mu} (2x)^{\frac{2}{n}-1} = c_{11}\, x^{\frac{2}{n}+2\mu-1}.$$

Zweitens

$$4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi$$

$$= 8\sum_{b=1}^{m}\sum_{a=1}^{b-1}\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi + 4\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1} P(\xi, b, b)\, d\xi,$$

also nach (46) und (47)

$$\left| 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi \right|$$

$$\leqq 8\sum_{b=1}^{m}\sum_{a=1}^{b-1} \operatorname{Min}\left(c_8 \frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu}}{b^{1+\frac{1}{n}}},\ c_9 \frac{x^{1-\frac{1}{n^2}}}{b^{2+\frac{1}{n}}} \right)$$

$$+ 8\sum_{b=1}^{m} \operatorname{Min}\left(c_8 \frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu}}{b^{1+\frac{1}{n}}},\ c_9 \frac{x^{1-\frac{1}{n^2}}}{b^{2+\frac{1}{n}}} \right)$$

$$\leqq c_{12}\sum_{b=1}^{m} b \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu}}{b^{1+\frac{1}{n}}},\ \frac{x^{1-\frac{1}{n^2}}}{b^{2+\frac{1}{n}}} \right)$$

$$< c_{13}\sum_{b=1}^{\infty} \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu}}{b^{\frac{1}{n}}},\ \frac{x^{1-\frac{1}{n^2}}}{b^{1+\frac{1}{n}}} \right)$$

$$\leqq c_{13}\sum_{b=1}^{\left[x^{1-\mu-\frac{1}{n}}\right]+1} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu} b^{-\frac{1}{n}} + c_{13}\sum_{b=\left[x^{1-\mu-\frac{1}{n}}\right]+2}^{\infty} x^{1-\frac{1}{n^2}} b^{-1-\frac{1}{n}}$$

$$< c_{13} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu} \int_0^{x^{1-\mu-\frac{1}{n}}+1} \frac{db}{b^{\frac{1}{n}}} + c_{13} x^{1-\frac{1}{n^2}} \int_{x^{1-\mu-\frac{1}{n}}}^{\infty} \frac{db}{b^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= c_{13} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu} \cdot \frac{n}{n-1} \left(x^{1-\mu-\frac{1}{n}} + 1 \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$+ c_{13} x^{1-\frac{1}{n^2}} \cdot n \left(x^{1-\mu-\frac{1}{n}} \right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\leqq c_{14} \left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu+1-\frac{1}{n}-\mu+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + x^{1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= 2 c_{14} x^{1+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}}. \tag{50}$$

Setzt man nun (49) und (50) in (48) ein, so erhält man

$$\left| \int_x^{x_1} A_n(\xi)\, d\xi - J x^{\frac{2}{n}+\mu} \right| \leqq c_{10} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mu} + c_{11} x^{\frac{2}{n}+2\mu-1} + 2 c_{14} x^{1+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}};$$

wegen $\mu = \dfrac{2n-3}{2n-1}$ ist, da $n > 1$ ist,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \mu < 2\mu + \frac{2}{n} - 1$$

und

$$2\mu + \frac{2}{n} - 1 = 1 + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{n}.$$

Zur Abkürzung setze ich $2\mu + \dfrac{2}{n} - 1 = \alpha + \mu$, sodaß

$$\alpha = \mu + \frac{2}{n} - 1 = \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{2n-1}$$

wird. Dann ist

$$\left| \int_x^{x_1} A_n(\xi)\, d\xi - J x^{\frac{2}{n}+\mu} \right| < c_{15} x^{\alpha+\mu}$$

oder

$$\int_x^{x_1} A_n(\xi)\, d\xi = J x^{\frac{2}{n}+\mu} + O(x^{\alpha+\mu}).$$

Hieraus folgt wegen

$$x^\mu A_n(x) = (x_1 - x) A_n(x) \leqq \int_x^{x_1} A_n(\xi)\, d\xi < (x_1 - x) A_n(x_1) = x^\mu A_n(x_1)$$

erstens

$$x^\mu A_n(x) \leqq J x^{\frac{2}{n} + \mu} + O(x^{\alpha+\mu}),$$

$$A_n(x) \leqq J x^{\frac{2}{n}} + O(x^\alpha); \tag{51}$$

zweitens

$$x^\mu A_n(x_1) \geqq J x^{\frac{2}{n} + \mu} + O(x^{\alpha+\mu}),$$

$$A_n(x_1) > J x^{\frac{2}{n}} + O(x^\alpha);$$

nun ist aber $x_1 = x + x^\mu$, $x = x_1 - x^\mu \geqq x_1 - x_1^\mu$, folglich

$$\begin{aligned} A_n(x_1) &\geq J(x_1 - x_1^\mu)^{\frac{2}{n}} + O(x_1^\alpha) \\ &= J x_1^{\frac{2}{n}} - J x_1^\mu \cdot \frac{2}{n} \cdot \xi^{\frac{2}{n} - 1} + O(x_1^\alpha) \qquad (x_1 - x_1^\mu \leqq \xi \leqq x_1) \\ &= J x_1^{\frac{2}{n}} + O(x_1^\alpha). \end{aligned} \tag{52}$$

Aus (51) und (52) ergibt sich, wenn für α sein Wert eingesetzt wird, der zu beweisende Satz

$$A_n(x) = J x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{2n-1}}\right). \tag{5}$$

Anhang.

Für die Leser der großen Arbeit III des Herrn Landau will ich noch zeigen, wie sich die dort im fünften Teil, der das Ellipsenproblem behandelt, enthaltene Untersuchung vereinfachen läßt. Es handelt sich um S. 2308—2318, nämlich die Hilfssätze 34 und 35 und den § 22. Diese Partie ist durch den folgenden, hinter Hilfssatz 36 auf S. 2321 einzuschiebenden Beweis der Relation (121) zu ersetzen. Mein Beweis besteht in einer Umarbeitung des § 22 und einer Abschätzung, die dem Beweis des Hilfssatzes 37 (im Spezialfall $a = 0$) nachgebildet ist. — Die entsprechende Vereinfachung von II S. 15—20, d. h. Hilfssatz 10 und § 2, findet man bequemer im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit, in § 8 und § 10, wo nur $n = 2$ zu setzen ist.

Es mögen also jetzt die Bezeichnungen des fünften Teiles von III gelten.

Es ist identisch

$$\varphi_m(u)\,\varphi_m(v) = 1 + (\varphi_m(u) - 1) + (\varphi_m(v) - 1) + (\varphi_m(u) - 1)\,(\varphi_m(v) - 1);$$

also ist

$$\iint_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv = \iint_G du\,dv + \iint_G (\varphi_m(u) - 1)\,du\,dv + \iint_G (\varphi_m(v) - 1)\,du\,dv + \iint_G (\varphi_m(u) - 1)\,(\varphi_m(v) - 1)\,du\,dv.$$

und nach der Definition von $\varphi_m(u)$

$$\iint_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv = \iint_G du\,dv + 2\sum_{a=1}^{m} \iint_G \cos 2a\pi u\,du\,dv$$

$$+ 2\sum_{b=1}^{m} \iint_G \cos 2b\pi v\,du\,dv + 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} P(x, a, b). \tag{A}$$

Hierin ist erstens

$$\iint_G du\,dv = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\,x. \tag{B}$$

Zweitens

$$\int\int \cos 2b\pi v\,du\,dv = \frac{1}{2b\pi}\int_{-\vartheta-\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}}^{-\vartheta+\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}} \left\{\sin 2b\pi\left(-\Theta+\frac{-\beta(\vartheta+u)+\sqrt{4\gamma x-\Delta(\vartheta+u)^2}}{2\gamma}\right)\right.$$
$$\left. -\sin 2b\pi\left(-\Theta+\frac{-\beta(\vartheta+u)-\sqrt{4\gamma x-\Delta(\vartheta+u)^2}}{2\gamma}\right)\right\} du;$$

die beiden Integrale rechts sind

$$\int_{-\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}}^{+\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}} \sin 2b\pi\left(-\Theta+\frac{-\beta U\pm\sqrt{4\gamma x-\Delta U^2}}{2\gamma}\right)dU.$$

Setzt man hierin

$$\sin 2b\pi\left(-\Theta+\frac{-\beta U\pm\sqrt{4\gamma x-\Delta U^2}}{2\gamma}\right)$$
$$= \cos 2b\pi\Theta \sin 2b\pi\frac{-\beta U\pm\sqrt{4\gamma x-\Delta U^2}}{2\gamma}$$
$$-\sin 2b\pi\Theta\cos 2b\pi\frac{-\beta U\pm\sqrt{4\gamma x-\Delta U^2}}{2\gamma},$$

so zerfällt $\int\int_G \cos 2b\pi v\,du\,dv$ in vier Summanden der Form

$$\pm\frac{1}{2b\pi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2b\pi\Theta\cdot\int_{-\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}}^{+\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\frac{b\pi}{\gamma}(-\beta U\pm\sqrt{4\gamma x-\Delta U^2})\,dU$$

$$=\pm\frac{1}{2b\pi}\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2b\pi\Theta\cdot\int_{-1}^{+1}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}2b\pi\sqrt{\frac{x}{\gamma}}\left(\frac{-\beta}{\sqrt{\Delta}}t\pm\sqrt{1-t^2}\right)dt.$$

Auf dieses Integral ist Hilfssatz 36 von III mit $\varkappa=-1$, $\lambda=+1$, $\omega=2b\pi\sqrt{\frac{x}{\gamma}}$, $\varrho=\frac{-\beta}{\sqrt{\Delta}}$ anwendbar und liefert also die Abschätzung

$$\left|\int\int_G \cos 2b\pi v\,du\,dv\right| \leqq 4\frac{1}{2b\pi}\sqrt{\frac{4\gamma x}{\Delta}}\frac{6}{\sqrt{2b\pi\sqrt{\frac{x}{\gamma}}}} = c_{16}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}};$$

ebenso würde man finden

$$\left|\iint_G \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq 4\,\frac{1}{2a\pi}\sqrt{\frac{4\alpha x}{\Delta}}\,\frac{6}{\sqrt{2a\pi\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}} = c_{17}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Weiter ergibt sich also

$$\text{(C)}\quad \begin{cases} \left|2\sum_{b=1}^{m}\iint_G \cos 2b\pi v\,du\,dv\right| \leqq 2c_{16}x^{\frac{1}{4}}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} = c_{18}x^{\frac{1}{4}} \\ \text{und} \\ \left|2\sum_{a=1}^{m}\iint_G \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq 2c_{17}x^{\frac{1}{4}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = c_{19}x^{\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

Nun folgt aus Hilfssatz 33 unter Berücksichtigung von (A), (B) und (C), wenn $Z \geqq 1$ ist:

Für $m \geqq m_0 = m_0(Z)$ und alle x der Strecke $1 \leqq x \leqq Z$ ist

$$\left|A(x) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}x - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}P(x,a,b)\right| < a_2x^{\frac{1}{3}} + c_{18}x^{\frac{1}{4}} + c_{19}x^{\frac{1}{4}} \leqq a_8x^{\frac{1}{3}},$$

und das ist die zu beweisende Relation (121).

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

Erster Teil. Über die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in drei Quadrate.

§ 1. Approximation von $A(x)$ durch ein dreifaches Integral . . . 9

§ 2. Umformung des dreifachen Integrals 18

§ 3. Abschätzung der Doppelsumme in (17) 19

§ 4. Vorbereitungen zur Abschätzung der dreifachen Summe in (17) . 20

§ 5. Beweis der Endformel 23

§ 6. Folgerungen 27

Zweiter Teil. Über die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in zwei $n$te Potenzen.

§ 7. Approximation von $A_n(x)$ durch ein Doppelintegral 34

§ 8. Umformung des Doppelintegrals 40

§ 9. Hilfssätze 41

§ 10. Abschätzung der einfachen Summe in (44) 43

§ 11. Abschätzung von P und $\int P d\xi$ 44

§ 12. Beweis der Endformel 46

Anhang 50

Vita.

Ich, Eduard Ludwig Detlef Cauer, wurde am 14. Juli 1889 in Kiel geboren, als Sohn des Oberlehrers am Gymnasium, jetzigen ordentlichen Honorarprofessors an der Universität Münster, Dr. Paul Cauer und seiner Frau Helene geb. Kummer. Wiederholter Wandel in den amtlichen Verhältnissen meines Vaters brachte es mit sich, daß auch ich Wohnort und Schule mehrfach zu wechseln hatte. Ostern 1896 kam ich in die Vorschule des Kgl. Gymnasiums zu Flensburg, verlebte dann den größten und bedeutendsten Teil meiner Schulzeit (seit Herbst 1898) am Städtischen Gymnasium und Realgymnasium in Düsseldorf; von Herbst 1905 an besuchte ich das Kgl. Schiller-Gymnasium in Münster, an dem ich Ostern 1908 das Abiturientenexamen bestand. Darauf studierte ich nacheinander an den Universitäten Kiel (1 Semester), Berlin (2 Semester), Münster (2 Semester) und, seit Herbst 1910, Göttingen, in erster Linie Mathematik. Seit Oktober 1912 bin ich Privatassistent von Herrn Professor Landau.

Bei folgenden Herren habe ich Vorlesungen gehört oder Übungen mitgemacht:

In Kiel: Dieterici, Heffter, Georg Hoffmann, Kobold, Oldenberg, Pochhammer.

In Berlin, an der Universität: Hermann Diels, Edmund Landau, Rubens, Schur, H. A. Schwarz, Struve;
an der technischen Hochschule: Jolles.

In Münster: Cauer, Dehn, Killing, Konen, v. Lilienthal, Matthies, Plassmann, Salkowski, Gerhard Schmidt, Sonnenburg, Thomsen.

In Göttingen: Ambronn, Bousset, Carathéodory, Courant, Haar, Hartmann, Hilbert, Landau, Max Lehmann, Georg Elias Müller, Oldenberg, Smend †, Toeplitz, Weyl, Wiechert.

Allen meinen Lehrern fühle ich mich zu bleibendem Danke verpflichtet, zumal denen, von denen ich auch in persönlichem Verkehr Belehrung und Anregung empfangen durfte. Unter diesen werde H. A. Schwarz hervorgehoben, der mir in Berlin ein väterlicher Freund und Berater wurde und es nach meinem Weggang immer geblieben ist, sowie Herr Professor Landau, dem ich meine Ausbildung in der Analysis verdanke und der auch die vorliegende Arbeit angeregt und durch mannigfache Ratschläge gefördert hat.